Démonstration

Produit de Groupes Cycliques et
Conditions de Cyclicité

Présenté par

FERRAG Wassim

1 Introduction

Dans ce texte on prouve la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit* $(G_i)_{i=1}^n$ *des groupes finis*

$$\prod_{i=1}^n G_i \simeq \mathbb{Z}/\left(\prod_{i=1}^n o(G_i)\right)\mathbb{Z} \iff \forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ i \neq j \Rightarrow o(G_i) \wedge o(G_j) = 1$$

2 Démonstration

2.1 Sens direct (⇒)

Supposons que

$$\prod_{i=1}^n G_i \simeq \mathbb{Z}/\left(\prod_{i=1}^n o(G_i)\right)\mathbb{Z}$$

Posons $o(G_i) = n_i$ et $\prod_{i=1}^n n_i = P_n$.

Considérons

$$A = \{e_1\} \times \cdots \times \{e_{k-1}\} \times G_k \times \{e_{k+1}\} \times \cdots \times \{e_n\}$$

qui est un sous-groupe de $\prod_{i=1}^n G_i$.

Puisque $\prod_{i=1}^n G_i \simeq \mathbb{Z}/P_n\mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme

$$\varphi : \prod_{i=1}^n G_i \to \mathbb{Z}/P_n\mathbb{Z}$$

Considérons l'image de A par φ. Alors $\varphi(A)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/P_n\mathbb{Z}$.

Puisque $\mathbb{Z}/P_n\mathbb{Z}$ est cyclique, tous ses sous-groupes sont cycliques.

Puisque φ est une bijection et un morphisme, il advient que

$$A \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

avec m l'ordre de A.

Vu que

$$A = \{e_1\} \times \cdots \times G_k \times \cdots \times \{e_n\}$$

on peut calculer son cardinal :

$$o(A) = \prod_{i \neq k} o(\{e_i\}) \times o(G_k) = o(G_k) = n_k$$

car $o(\{e_i\}) = 1$ pour tout $i \neq k$.

Donc $A \simeq \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$.

On définit ensuite une projection π telle que :

$$\begin{aligned} \pi : A &\to G_k \\ (e_1, \dots, g_k, \dots, e_n) &\mapsto g_k \end{aligned}$$

π est un morphisme car

$$\begin{aligned} \pi(a+b) &= \pi(e_1, \dots, g_{k1} + g_{k2}, \dots, e_n) \\ &= g_{k1} + g_{k2} \\ &= \pi(e_1, \dots, g_{k1}, \dots, e_n) + \pi(e_1, \dots, g_{k2}, \dots, e_n) \end{aligned}$$

π est un isomorphisme car on peut définir π^{-1} :

$$\pi^{-1}(g_k) = (e_1, \dots, g_k, \dots, e_n)$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} \pi(\pi^{-1}(g_k)) &= g_k = \mathrm{Id}_{G_k} \\ \pi^{-1}(\pi(e_1, \dots, g_k, \dots, e_n)) &= (e_1, \dots, g_k, \dots, e_n) = \mathrm{Id}_A \end{aligned}$$

Donc $G_k \simeq A \simeq \mathbb{Z}/o(G_k)\mathbb{Z}$, donc G_k est cyclique.

Ensuite, considérons

$$B = \{e_1\} \times \cdots \times G_i \times \cdots \times G_j \times \cdots \times \{e_n\}$$

B est un sous-groupe de $\prod_{k=1}^{n} G_k$ et $\varphi(B)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/P_n\mathbb{Z}$.
Donc $\varphi(B)$ est un groupe cyclique.
Puisque φ est une bijection, on a

$$B \simeq \varphi(B) \simeq \mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}$$

avec $m' = o(B) = o(G_i) \times o(G_j) = n_i n_j$.
Donc

$$B \simeq \mathbb{Z}/(n_i n_j)\mathbb{Z}$$

On définit de la même manière

$$\begin{aligned} \pi_2 : B &\to G_i \times G_j \\ (e_1, \dots, g_i, \dots, g_j, \dots, e_n) &\mapsto (g_i, g_j) \end{aligned}$$

Montrons que π_2 est un isomorphisme entre B et $G_i \times G_j$.
Soient $a, b \in B$. Alors

$$\begin{aligned} \pi_2(a+b) &= \pi_2(e_1, \dots, g_{i1} + g_{i2}, \dots, g_{j1} + g_{j2}, \dots, e_n) \\ &= (g_{i1} + g_{i2}, g_{j1} + g_{j2}) \\ &= (g_{i1}, g_{j1}) + (g_{i2}, g_{j2}) \\ &= \pi_2(a) + \pi_2(b) \end{aligned}$$

Définissons π_2^{-1} :

$$\pi_2^{-1}(g_i, g_j) = (e_1, \ldots, g_i, \ldots, g_j, \ldots, e_n)$$

On vérifie :

$$\pi_2(\pi_2^{-1}(g_i, g_j)) = (g_i, g_j) = \mathrm{Id}_{G_i \times G_j}$$
$$\pi_2^{-1}(\pi_2(e_1, \ldots, g_i, \ldots, g_j, \ldots, e_n)) = (e_1, \ldots, g_i, \ldots, g_j, \ldots, e_n) = \mathrm{Id}_B$$

Donc π_2 est une bijection et donc un isomorphisme entre B et $G_i \times G_j$.
On a ainsi

$$\mathbb{Z}/(n_i n_j)\mathbb{Z} \simeq B \simeq G_i \times G_j$$

Donc $G_i \times G_j$ est cyclique.

Considérons deux générateurs g_i, g_j de G_i, G_j respectivement. Alors

$$o((g_i, g_j)) = \mathrm{ppcm}(o(g_i), o(g_j)) = \mathrm{ppcm}(n_i, n_j)$$

Puisque $G_i \times G_j$ est cyclique d'ordre $n_i n_j$, on a

$$\mathrm{ppcm}(n_i, n_j) = n_i n_j$$

Donc

$$\mathrm{pgcd}(n_i, n_j) = \frac{n_i n_j}{\mathrm{ppcm}(n_i, n_j)} = 1$$

Ce qui conclut la première partie de la démonstration.

2.2 Sens réciproque ($\Leftarrow$)

Soit $G_i \simeq \mathbb{Z}/o(G_i)\mathbb{Z}$ et $\forall i, j,\ i \neq j \Rightarrow n_i \wedge n_j = 1$.
On procédera par récurrence.

Cas de base : Considérons $G_1 \times G_2$ avec $n_1 \wedge n_2 = 1$.
G_1, G_2 sont cycliques. Prenons deux générateurs g_1, g_2. Alors

$$o((g_1, g_2)) = \mathrm{ppcm}(o(g_1), o(g_2)) = \mathrm{ppcm}(n_1, n_2) = n_1 n_2$$

Donc $o(G_1 \times G_2) = n_1 n_2$, donc il existe un élément qui génère tout $G_1 \times G_2$.
Donc $G_1 \times G_2 \simeq \mathbb{Z}/(n_1 n_2)\mathbb{Z}$.

Récurrence : Procédons par récurrence sur k. On pose

$$P_k : \prod_{i=1}^{k} G_i \simeq \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z} \quad \text{où} \quad p_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

P_2 est vraie d'après le cas de base.

Supposons que P_k est vraie pour k arbitraire et prouvons P_{k+1}.
Si

$$\prod_{i=1}^{k} G_i \simeq \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$$

alors

$$\prod_{i=1}^{k+1} G_i = \left(\prod_{i=1}^{k} G_i\right) \times G_{k+1} \simeq \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_{k+1}\mathbb{Z}$$

Puisque $p_k \wedge n_{k+1} = 1$ (car $\forall i \leq k$, $n_i \wedge n_{k+1} = 1$), on a

$$\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_{k+1}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(p_k n_{k+1})\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p_{k+1}\mathbb{Z}$$

Donc

$$\prod_{i=1}^{k+1} G_i \simeq \mathbb{Z}/p_{k+1}\mathbb{Z}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Par le principe de récurrence, P_k est vraie pour tout $k \geq 2$.
En posant $k = n$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} G_i \simeq \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\left(\prod_{i=1}^{n} n_i\right)\mathbb{Z}$$

3 Conclusion

On a donc conclu la démonstration :

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} G_i \simeq \mathbb{Z}/\left(\prod_{i=1}^{n} o(G_i)\right)\mathbb{Z} \iff \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \Rightarrow o(G_i) \wedge o(G_j) = 1}$$